

复数域内的最小二乘法*

谷湘潜 康红文 曹鸿兴

中国气象科学研究院灾害天气国家重点实验室, 北京 100081

摘要 把经典的最小二乘法推广到复数域内, 形成所谓的复最小二乘法, 公式推导和实际计算表明复数域内的最小二乘法有别于实数最小二乘法; 把复数序列中的实部和虚部分开来计算得不到所希望的最小二乘估计, 因而是个不合适的; 简单的汛期预报模型及其预报试验也表明了应用复最小二乘法的优势; 目前国内外的文献都未见到有关的研究, 显示复最小二乘法具有数学方法上的原始创新价值和意义. 这一方法的实现对复数域内的统计分析预报方法的研究可以起到很好的促进作用.

关键词 复最小二乘法 Fourier 变换 汛期预报

经典的最小二乘法在气象统计中有着极为广泛的应用^[1-7], 实际应用中, 在统计分析预报方程, 甚至是数学物理方程的一些系数^[8], 大都是需要最小二乘法来估计计算的, 可以说最小二乘法是从事科学研究的有效工具, 但目前的计算都是针对实数域内的, 在复数域内的最小二乘法却未见到. 一些统计方法也被推广到复数域内, 从而使该方法富有新的意义, 比如传统的 EOF 分离出来的仅是空间驻波振动分布结构, 而复经验正交函数分解 (CEOF) 能够分离气候变量场空间尺度行波分布结构以及位相变化^[9,10], 这一特殊功效为气候场的诊断研究提供更为有效的工具, 从而得到比原方法更多的信息. 显然把极为重要的最小二乘法的推广到复数域内也应当具有同样的价值和意义.

复数的形式在大气科学领域中不少, 如全球谱模式中的球谐系数为复数. 在文献[11]中我们用到了复最小二乘法去解决如何确定复自忆系数的问题, 为建立全球自忆谱模式奠定了基础. 本文试图把它作为一种方法提炼出来, 并应用一个简单的例子说明复最小二乘法和实数中的最小二乘法的区别, 并以此为基础建立了一个简单的汛期预报模型, 对比分析展示了应用复数最小二乘法的优势和

良好前景.

1 数学推导

设有因变量 y 与 p 个自变量 x_1, x_2, \dots, x_p , 它们都是经过距平化后的复数, 设复线性相关模型

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + e, \quad (1)$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 为复系数, e 为复数误差项. 如何用一组样本来确定复系数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 的估计, 就是我们要解决的问题.

为研究 y 与 x_1, x_2, \dots, x_p 之间的关系, 也就是确定复系数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, 作 n 次采样, 则因变量 y 的样本为

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

而第 i 次采样的自变量为

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

在线性假定(1)下, 有如下方程组:

2005-05-24 收稿, 2005-07-14 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 40175027)

E-mail: guxq@cams.cma.gov.cn

$$\begin{cases} y_1 = \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{1p} + e_1 \\ y_2 = \beta_2 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_p x_{2p} + e_2 \\ \vdots \\ y_n = \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_p x_{np} + e_n \end{cases}, \quad (2)$$

写成矩阵形式

$$Y = X\beta + e, \quad (3)$$

其中 Y, β, e 为复变量, 分别为

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

X 为复因子矩阵,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix},$$

其中元素 $y_i, \beta_i, e_i, x_{ij} (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p)$ 均为复数.

复系数的估计值 b_1, b_2, \dots, b_p 的确定应使全部的拟合值 \hat{y}_i 与实际值 y_i 之差的模的平方和最小, 即满足

$$Q = \sum_{i=1}^n (|y_i - \hat{y}_i|)^2 \quad (4)$$

为最小.

实际上 Q 是 b_1, b_2, \dots, b_p 的非负二次项, 所以最小值一定存在, 根据微分学中极值原理, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial b_p} = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

这样计算确定复系数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 的估计 b_1, b_2, \dots, b_p 的方法就是本文用到的复最小二乘法. 由于

b_1, b_2, \dots, b_p 都是复数, 不能如实数领域内一样由(5)式直接求出.

将(4)式写成矢量形式:

$$\begin{aligned} Q &= (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) \\ &= (Y - XB)^T - \overline{(Y - XB)} \\ &= (Y^T - B^T X^T)(\bar{Y} - \overline{XB}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$(\)^T$ 表示转置, $\overline{(\)}$ 表示共轭.

这样(5)式可以写为

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = 0. \quad (7)$$

$$\text{令 } b_k = b_k^r + b_k^i I, \quad (k=1, 2, \dots, p), \quad (8)$$

$$\text{则 } \bar{b}_k = b_k^r - b_k^i I,$$

b_k^r 为实部, b_k^i 为虚部, b_k^r, b_k^i 均为实变量, I 表示复数单元, 满足下列关系式:

$$\begin{cases} I^2 = (-I)^2 = -1 \\ I = \sqrt{-1} \\ -I = -\sqrt{-1}, \end{cases}$$

这样对 b 的求导, 便可转化为分别对实部 b_k^r 及虚部 b_k^i 的求导.

为此把 Q 的每一项逐项具体写出:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \sum_{j=1}^p b_j x_{ij})(\bar{y}_i - \sum_{j=1}^p \bar{b}_j \bar{x}_{ij})] \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i \bar{y}_i - y_i \sum_{j=1}^p \bar{b}_j \bar{x}_{ij} - \bar{y}_i \sum_{j=1}^p b_j x_{ij} + \\ &\quad \sum_{j=1}^p \bar{b}_j x_{ij} \sum_{j=1}^p \bar{b}_j \bar{x}_{ij}] \\ &= \sum_{i=1}^n \{y_i \bar{y}_i - y_i \sum_{j=1}^p [(b_j^r - b_j^i I) \bar{x}_{ij}] - \\ &\quad \bar{y}_i \sum_{j=1}^p [b_j^r + b_j^i I] x_{ij} + \\ &\quad \sum_{j=1}^p [(b_j^r + b_j^i I) x_{ij}] \sum_{j=1}^p [(b_j^r - b_j^i I) \bar{x}_{ij}]\}, \end{aligned} \quad (9)$$

Q 对实部 b_k^r 求偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b_k^x} &= \sum_{i=1}^n \{ [-y_i \bar{x}_{ik} - \bar{y}_i x_{ik}] + x_{ik} \sum_{j=1}^p [(b_j^x - b_j^y) \bar{x}_{ij}] + \bar{x}_{ik} \sum_{j=1}^p [(b_j^x + b_j^y) x_{ij}] \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ [-y_i \bar{x}_{ik} - \bar{y}_i x_{ik}] + \sum_{j=1}^p [b_j^x (x_{ik} \bar{x}_{ij} + \bar{x}_{ik} x_{ij})] + \sum_{j=1}^p [b_j^y (\bar{x}_{ik} x_{ij} - x_{ik} \bar{x}_{ij})] \} \\ &= 0, \\ &(k = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \quad (10)$$

同理, Q对虚部 b_k^y 求偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b_k^y} &= \sum_{i=1}^n \{ [y_i \bar{x}_{ik} - \bar{y}_i x_{ik}] I + x_{ik} I \sum_{j=1}^p [(b_j^x - b_j^y) \bar{x}_{ij}] - \bar{x}_{ik} I \sum_{j=1}^p [(b_j^x + b_j^y) x_{ij}] \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ [y_i \bar{x}_{ik} - \bar{y}_i x_{ik}] I + I \sum_{j=1}^p [b_j^x (x_{ik} \bar{x}_{ij} - \bar{x}_{ik} x_{ij})] - I \sum_{j=1}^p [b_j^y (\bar{x}_{ik} x_{ij} + x_{ik} \bar{x}_{ij})] \} \\ &= 0, \\ &(k = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \quad (11)$$

(10)式移项整理得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^p \{ b_j^x [\sum_{i=1}^n (x_{ik} \bar{x}_{ij} + \bar{x}_{ik} x_{ij})] \} + \\ &I \sum_{j=1}^p \{ b_j^y [\sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ik} x_{ij} - x_{ik} \bar{x}_{ij})] \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ [y_i \bar{x}_{ik} + \bar{y}_i x_{ik}] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

(11)式移项整理得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^p \{ b_j^x [\sum_{i=1}^n (x_{ik} \bar{x}_{ij} - \bar{x}_{ik} x_{ij})] \} - \\ &I \sum_{j=1}^p \{ b_j^y [\sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ik} x_{ij} + x_{ik} \bar{x}_{ij})] \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ [-y_i \bar{x}_{ik} + \bar{y}_i x_{ik}] \}, \end{aligned} \quad (13)$$

$(k = 1, 2, \dots, p).$

将(12)–(13)式合并整理得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^p [(b_j^x + b_j^y) I \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ik} x_{ij})] = \sum_{i=1}^n (y_i \bar{x}_{ik}), \\ &(k = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \quad (14)$$

将(8)式代入(14)式,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^p [b_j \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ik} x_{ij})] = \sum_{i=1}^n (y_i \bar{x}_{ik}), \\ &(k = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \quad (15)$$

将(15)式写成矩阵形式

$$\bar{X}^T \mathbf{X} \mathbf{B} = \bar{X}^T \mathbf{Y}, \quad (15)$$

或者

$$\mathbf{B} = (\bar{X}^T \mathbf{X})^{-1} \bar{X}^T \mathbf{Y}, \quad (17)$$

$()^{-1}$ 表示对矩阵求逆.

对照传统的线性最小二乘法的估计公式^[8]:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \quad (18)$$

公式(17)的惟一不同是在矩阵 \mathbf{X} 多了共轭运算.

2 应用举例

2.1 简单例子

过去在复数的统计计算时, 往往把实部和虚部分离对待, 这样不但存在数学上的问题, 实际效果也不理想. 这里用一个简单的例子说明实数域内和复数域内的最小二乘法存在的不同点:

存在一个复数序列 $x_i = (1, 3), (3, -2), (2, 1), (7, -2), (2, 7), (1, 5), (9, 9), (15, -3), (3, 15), (-2, -2), (-2, -2), (11, 7), (2, 5), (-1, -2), (14, 7), (2, 1), (7, 2), (3, -2), (9, 3), (7, 1). i = 1, 2, \dots, N$ ($N=20$), 求出这一复数序列的自回归方程^[8]:

$$x_k = B_0 + \sum_{j=1}^p B_j x_{k-j}, (k = p, p+1, \dots, N), \quad (19)$$

取 $p=3$, 把实部和虚部分开采用实最小二乘法 (18), 可以得到 \mathbf{B} 的估计:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.24 + 0.031 \\ -0.20 + 0.031 \\ -0.43 - 0.071 \\ -0.28 - 0.461 \end{bmatrix},$$

如果使用复最小二乘法 (17), 也可以得到 \mathbf{B} 的估计:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.80 + 5.221 \\ -0.12 - 0.251 \\ -0.18 - 0.021 \\ -0.36 + 0.141 \end{bmatrix},$$

显然两者是不同的, 为了更进一步说明复数二乘法的正确性, 计算两者的模拟和实况的之间模的平方和, 也即误差平方和. 实部和虚部分开采用实最小二乘法的模拟和实况的之间模的平方和为 $Q_r = 11.12$; 使用复最小二乘法后, 模拟和实况的之间模的平方和为 $Q_b = 6.21$, 显然, 采用复最小二乘法, 误差平方和比较小, 两者之间几乎相差 2 倍, 也说明了对复数序列, 如果采用把实部和虚部分开采用实最小二乘法来分别计算是不能取得最小的, 因而也是不妥的.

2.2 汛期降水预报模型

为了进一步说明复最小二乘法的实际应用, 这里再举一个例子, 使用复自回归法制作全国 160 站的汛期降水预报, 具体方法如下.

把每年的降水距平百分率作一维离散 Fourier 展开^[13,14]:

$$R_{j,l} = \sum_{k=1}^N \left[c_{k,l} \exp\left(i \frac{2\pi j}{N} k\right) \right], \quad (20)$$

其中 $\exp\left(i \frac{2\pi j}{N} k\right) = \cos\left(\frac{2\pi j}{N} k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{N} k\right)$,

$i = \sqrt{-1}$ 表示复数单元. $j = 1, 2, \dots, N$ 表示站号, k 表示波数, l 表示年份 1951, 1952, \dots , $C_{k,l}$ 为复数.

$$c_{k,l} = a_{k,l} + b_{k,l}i, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (21)$$

$R_{j,l}$ 表示 160 站的降水距平百分率, 这样空间的降水距平百分率转化离散的 Fourier 空间表示, 每一年 160 站的降水距平百分率转化为 160 个复数序列, 每一个复数表示不同的波数, 同一波数的不同年份组成时间序列. 亦即利用历史资料求出 $C_{k,l}$, 把每一分量 $C_{k,l}$ 排成时间序列构成复数序列, 采用自回归方程:

$$c_{k,l+1} = B_0 + \sum_{j=1}^p B_j c_{k,l-j+1}. \quad (22)$$

应用上面推得的公式 (17) 确定系数 B_j ($j=0, 1, \dots, p$) 后, 代入 (22) 式计算得到下一年 ($l+1$) 的 Fourier 系数 $c_{k,l+1} = a_{k,l+1} + b_{k,l+1}i$ 的预报, 再应用 (20) 式就可得到下一年空间站点的降水距平百分率预报. 经过实际计算取 $p=3$ 或 2 为较好, 这里取为 3.

我们对 1980—2004 年, 共 25 年进行了后预报试验, 对预报结果计算它们的距平相关系数 ACC、国家气候中心预测室评分 Pc、以及均方根误差检验等, 为了说明采用复最小二乘法的效果, 这里分别计算采用单站自回归 (方法 2), 实部和虚部分别应用最小二乘法 (方法 3) 以及持续性预报 (方法 4). 表 1 列出每年各种方法预报的 ACC 检验. 表 2 给出不同评分的多年平均. 方法 1 就是为上面使用到的 3 阶复自回归法.

表 1 各种方法 ACC 评分的对比

预报年份	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
1980	0.017	-0.109	-0.039	-0.164
1981	0.284	-0.192	0.151	-0.287
1982	0.185	-0.119	0.021	0.034
1983	0.036	-0.246	-0.163	0.147
1984	0.086	-0.092	0.005	-0.035
1985	0.187	0.130	0.113	0.038
1986	0.067	-0.060	-0.056	0.324
1987	-0.005	-0.139	0.060	0.058
1988	0.166	-0.077	-0.027	-0.017
1989	0.057	-0.055	0.076	-0.071
1990	0.122	0.215	0.001	-0.051

续表

预报年份	方法1	方法2	方法3	方法4
1991	0.066	0.063	0.085	-0.051
1992	0.047	0.140	0.034	-0.140
1993	-0.066	-0.349	0.023	0.014
1994	-0.163	0.053	0.110	-0.038
1995	0.072	-0.174	-0.009	0.253
1996	0.342	-0.152	0.091	0.073
1997	-0.164	-0.040	-0.078	-0.219
1998	0.279	-0.200	0.182	-0.233
1999	-0.124	-0.060	-0.161	0.069
2000	-0.066	-0.125	0.002	-0.109
2001	-0.128	0.294	-0.081	-0.118
2002	-0.062	-0.052	-0.002	0.139
2003	0.002	0.001	0.031	-0.189
2004	0.072	0.059	0.036	0.180
平均	0.052	-0.051	0.016	-0.016

表2 各种方法的 ACC, Pc, RMSE 的多年平均

预报年份	方法1	方法2	方法3	方法4
ACC 平均	0.052	-0.051	0.016	-0.016
Pc 评分/%	72.76	69.67	70.71	63.28
RMSE/mm	38.08	41.24	39.05	52.97

从表1和表2可以看出,方法1的预报效果最稳定,1980—2004年的25年中有17年的ACC为正值,最好的年份是1996年,ACC达到了0.342,其他方法的最好年份都低于这一水平,特别是方法2的效果很不稳定.从25年的平均来看,以基于复最小二乘法的自回归预报,距平相关系数达到0.052,大于多年业务水平^[15] ACC=0.03. Pc评分达到73.可见无论是距平相关系数还是Pc评分来看,虽然复自回归法的预报效果仍不足以达到汛期预报的满意程度,但比其他3种方法都要有优势.方法2只是简单的对单站使用3阶的自回归预报,从ACC评分来看,效果最差;方法3进行了实数序列到复数的转换,但是求自回归系数采用的是实部和虚部分开的方法,正如2.1中所述,这样不能得到自回归系统的最小二乘法估计,但仍然显示了一定的预报技巧,ACC可以达到0.016,与方法1有较大的差距;Pc评分和RMSE也基本反映了这种情况.持续性预报(方法4)以前我们认为有一定的技巧^[16],这可能表现在不同的时段上,这里25年持续性预报平均来说几乎没有技巧,这可能与中国气候变化的阶段性有关^[17].

由于ACC是国际通用的场预报评分,这里绘出方法1的ACC评分随时间的演变图,从图1可见,方法1的预报表现具有很大的阶段性,如1980—1992年的ACC评分比较稳定,几乎都是正值,也就是具有很高的技巧,平均可以达到0.11,以后预报变得不稳定,尽管如此,1996年和1998年得到了高的ACC评分0.342和0.297.这显然与我国的降水周期突变有关,如果能结合一下其他周期性分析的方法,比如小波分析或波谱分析,使方程(22)的阶数P随预报时间改变,效果可能会更好些.

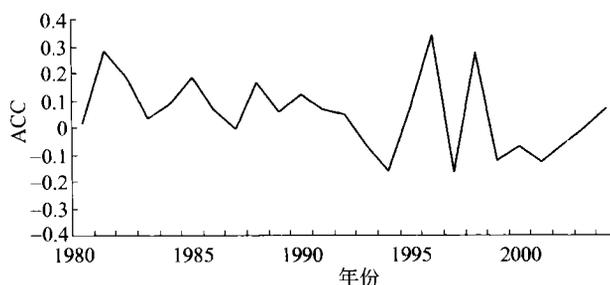


图1 方法1的ACC系数随时间的变化曲线

为什么使用复最小二乘法的方法具有这样的优势,可以从两个方面来分析原因:其一,把160站的降水距平百分率转化为复数序列,实现了从实空间转换到Fourier空间,Fourier系数表征的是整个物理场的特征,即位相和振幅,从而分离出比实空间更多的信息,这与其他复数的统计分析方法^[9]是一致的,这一步也是采用复最小二乘法的出发点;其二,由于采用复最小二乘法计算公式采用从而得到了具有实际意义的“最小估计”,因而模拟和预报效果当然就要优于单独采用实最小二乘法计算得到的.因此要对像Fourier系数这样的复数时间序列进行分析研究,复最小二乘法不失为一种行之有效的方法.

当然方法1仍有许多改进之处,如采用聚类分析的方法把160站重新排列来代替简单排列,其预报效果应当更好些.气象中广为使用的球谐系数就是复数形式,在大气自忆谱模式的设计^[11,12]中,我们采用了复最小二乘法来确定复记忆系数,取得了较好的效果.本文的目的是推导出复最小二乘法公式,并说明其应用方法,因此对更为深入的具体应用不作过多深究.

3 结语

本文得到的复最小二乘法是经典的最小二乘法在复数域内的推广,是处理复数序列的有效方法,以此为基础就可以把许多统计学中的方法推广在复数域内,形成复数域内的特有统计方法,如复自回归方程,复均生函数等.总结起来,本文有以下几点主要结论:

(1) 把传统的最小二乘法推广为复数域内的最小二乘法,在数学方法方面有原始创新的意义和价值,以此为基础可以形成具有复数特征的统计分析和预报方法.

(2) 应用实例表明从实空间到 Fourier 空间的转换,可以得到比实空间更多的信息,这是进行复最小二乘法的基础.

(3) 实际计算也表明,对复数采用实部和虚部分别计算处理,得不到所需要的最小二乘估计,因而也是不妥的.使用复最小二乘法的自回归预报,模拟和预报效果的都要好于其他的方法,可见开展复数域内的统计预报方法的研究是有前途的,而复最小二乘法则是可以利用的有效工具.

参 考 文 献

- 1 Morrison D F. Applied Linear Statistical Methods. New Jersey: Prentice-Hall Inc. 1983, 228--254
- 2 黄嘉佑. 气象统计分析与预报方法. 北京: 气象出版社, 1990, 51—59
- 3 么枕生. 气候统计学基础. 北京: 科学出版社, 1984, 191—199
- 4 曹鸿兴. 局地天气预报的数据分析方法. 北京: 气象出版社, 1983, 133—138
- 5 Hasselmannk, Barneff T P. Techniques of linear predocation for system with periodic statistics. J Atmos Sci, 1981, 38: 2275—2283
- 6 安鸿志, 顾 岚. 统计模型与预报方法. 北京: 气象出版社, 1986, 22—36
- 7 盛 聚, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1995, 279—290, 403
- 8 郭秉荣, 史久恩, 丑纪范. 使用多时刻历史资料的动力统计长期天气数值预报模式. 第二次全国数值天气预报会议论文集. 北京: 科学出版社, 1980, 115—126
- 9 魏凤英. 现在气候统计诊断预测技术. 北京: 气象出版社, 1999, 134—140
- 10 Li W, Yu R, Liu H et al. Impacts of diurnal cycle of SST on the intra seasonal variation of surface heat flux over the western Pacific warm pool. Advances in Atmospheric Sciences, 2001, 18 (5): 793—806
- 11 谷湘潜. 一个基于大气自忆原理的谱模式. 科学通报, 1998, 43 (9): 909—917
- 12 曹鸿兴, 谷湘潜. 自忆谱模式对中期环流预报的改进. 自然科学进展, 2001, 11(3): 308—313
- 13 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 武汉: 华中工学院出版社, 1982, 105—107
- 14 徐士良. C常用算法程序集(第二版). 北京: 清华大学出版社, 1996, 266—270
- 15 陈桂英, 赵振国. 短期气候预测评估方法和业务初估. 应用气象学报, 1998, 9(2): 178—185
- 16 曹鸿兴, 谷湘潜. 一种集成技术——最优调和法. 气象, 1999, 125, (5): 3—6
- 17 章基嘉, 葛 玲. 长期预报基础. 北京: 气象出版社, 1983, 210—213